

MEM-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Εργαστηριακή Άσκηση 1

Έστω πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δυο σημείων: αναζητάμε συνάρτηση $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) &= f(x), \quad \forall x \in [a, b], \\ y'(a) &= 0 \\ y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

με $q, f \in C[a, b]$ δοσμένες συναρτήσεις και $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ δοσμένα. Για να έχουμε μοναδική λύση πρέπει απαραίτητα να έχουμε ότι $q_{min} = \min_{x \in [a, b]} q(x) > 0$.

Άσκηση 1 Αν συμβολίσουμε με $Y \in \mathbb{R}^{N+1}$ το διάνυσμα με συνιστώσες y^0, \dots, y^N , δηλαδή $Y = (y^0, \dots, y^N)^T$, βρείτε το γραμμικό σύστημα που ορίζουν οι παραπάνω εξισώσεις και βεβαιωθείτε ότι έχει μοναδική λύση. Είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2 Έστω $y(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2}$ λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} -y''(x) + y(x) &= \cos(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1], \\ y'(0) &= 0 \\ y'(1) &= 0, \end{aligned}$$

Θεωρήστε $N = 50$ και κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η παραπάνω μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και κατασκευάστε το γράφημα της προσεγγιστικής μαζί με την ακριβή λύση.

Γνωρίζουμε ότι αν $y \in C^4[a, b]$, τότε το σφάλμα της παραπάνω μεθόδου πεπερασμένων διαφορών ικανοποιεί την

$$\max_{0 \leq i \leq N} |y^i - y(x_i)| \leq Ch^2.$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα

$$\mathcal{E}(N) = \max_{0 \leq i \leq N} |y^i - y(x_i)|,$$

για δυο διαφορετικές διαμερίσεις με $N_1 < N_2$, η πειραματική τάξη σύγκλισης ορίζεται ως

$$p = \frac{\ln \left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)} \right)}{\ln \left(\frac{N_1}{N_2} \right)}$$

Άσκηση 3 Θεωρήστε το διάνυσμα $N = [100, 200, 400, 800]$, υπολογίστε τα σφάλματα $\mathcal{E}(N)$ και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Σχεδιάστε ένα $\log - \log$ γράφημα του σφάλματος $\mathcal{E}(N)$ συναρτήσει του αριθμού των υποδιαστημάτων N .

ΠΑΡΑΔΟΣΗ:

Γράψτε μια αναφορά στην οποία θα πρέπει να περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στις αναλυτικές ασκήσεις, όσο και γραφήματα με τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Η αναφορά θα πρέπει να παραδοθεί σε ξεχωριστό αρχείο pdf από τον κώδικα. Μπορείτε να την γράψετε είτε στον υπολογιστή είτε χειρόγραφα, σκαναρισμένη. Στην τελευταία περίπτωση, θα πρέπει να επισυνάψετε και τα γραφήματα. Ημερομηνία και ώρα κατάθεσης μέχρι και 25/04/2021 στο mathp358@math.uoc.gr, αποκλειστικά από το ακαδημαϊκό σας email.